УДК 519.652

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Круглова Е.Э.

Пермский национально исследовательский политехнический университет

E-mail: 15Sakura15@mail.ru

В данной статье приведен пример решения кубического сплайна с помощью пакета Excel.

Ключевые слова: сплайн, аппроксимация, интерполяция, кубический полином.

CUBIC SPLINE

Kruglova E.E.

In this article is an example of solving a cubic spline using Excel package.

Keywords: spline, approximation, interpolation, cubic polynomial.

Сплайн – способ аппроксимации функции, заданной таблично с помощью набора кусочно-полиномных зависимостей.

Аппроксимация – построение приближенной функции.

Интерполяция – это способ нахождения промежуточных значений некоторой величины по имеющемуся набору данных. [1]

В математике часто ставится задачи о нахождении решения функции, которая задана на определённом отрезке. Сама по себе задача считается не из легких, и свое решение находит в большом объеме решений. Поэтому целью данной статьи является ознакомление с кубическим сплайном, который может упростить решение поставленных задач, и с полным разбором решения данного метода.

Пусть на отрезке $[a,b]$ известны табличные значения функции $y = f(x)$ в точках $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ – узлах интерполирования.

Сплайн $L(x)$ на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ отрезка $[a,b]$ строится в виде:

$$L_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = \overline{1, n}.. \quad (1)$$

Соответственно, для всего интервала будет n кубических полиномов и коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i, где i - номер сплайна.

Коэффициенты определяются из условий:

1. Равенство значений сплайнов L_i и аппроксимируемой функции $y = f(x)$ в узлах :

$L_1(x_0) = y(x_0),\ L_i(x_i) = y(x_i)$ при $i = \overline{1,\ n}$;

2. Гладкость совпадения сплайнов:

$$\left.\begin{array}{l} L_{i-1}(x_{i-1}) = L_i(x_{i-1}), \\ L'_{i-1}(x_{i-1}) = L'_i(x_{i-1}), \\ L''_{i-1}(x_{i-1}) = L''_i(x_{i-1}) \end{array}\right\} \text{ при } i = \overline{2,\ n};$$

3. Краевые условия: $L''(a) = L''(b) = 0$.

Подставляя в условия функцию сплайна $L_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ и производные данного сплайна $L'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2$ и $L''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$, также, полагая $h_i = x_i - x_{i-1}$, получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 - b_1h_1 + c_1h_1^2 - d_1h_1^3 = y(x_0); & & (2) \\ a_i = y(x_i) & \text{где } i = \overline{1,\ n}; & (3) \\ a_{i-1} = a_i - b_ih_i + c_ih_i^2 - d_ih_i^3, & & (4) \\ b_{i-1} = b_i - 2c_ih_i + 3d_ih_i^2, & \text{где } i = \overline{2,\ n} & (5) \\ c_{i-1} = c_i - 3d_ih_i, & & (6) \\ c_1 - 3d_1h_1 = 0; & & (7) \\ c_n = 0. & & (8) \end{cases}$$

Исключая неизвестные a_i, b_i, d_i, сводим систему к решению относительно неизвестных c_i. Введем эффективный коэффициент $c_0 = 0$.

Подставляя значения (3) в равенства (2) и (4), получим выражение

$$b_ih_i - c_ih_i^2 + d_ih_i^3 = y(x_i) - y(x_{i-1}), \text{ при } i = \overline{1,\ n}. \quad (9)$$

Из (6) и (7), учитывая $c_0 = 0$ выразим d_i через c_i:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i} \text{ при } i = \overline{1,\ n}. \quad (10)$$

С помощью формулы (10) убираем d_i в формуле (9). Получим:

$$\begin{cases} d_i = \dfrac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}, \\ b_i = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i} + \dfrac{2c_i + c_{i-1}}{3}h_i, \end{cases} \quad i = \overline{1,\ n} \quad (11)$$

После подстановки данных формул в выражение (5), получим выражение, с неизвестными коэффициентами c_i:

$$h_{i-1}c_{i-2}+2(h_{i-1}+h_i)c_{i-1}+h_ic_i=3\left[\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_i}-\frac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{h_{i-1}}\right]$$

$$i=\overline{2,\,n},\ c_0=0,\ c_n=0. \quad (12)$$

Получаем замкнутую систему. Представим формулу (12) в виде

$$h_{i-1}c_{i-2}+s_ic_{i-1}+h_ic_i=r_i, \quad (13)$$

где коэффициенты s_i и r_i: $s_i=2(h_{i-1}+h_i)$, (14)

$$r_i=3\left[\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_i}-\frac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{h_{i-1}}\right], \text{ при } i=\overline{2,\,n}. \quad (15)$$

Пусть $c_{i-1}=k_{i-1}+l_{i-1}c_i$. (16)

Тогда $c_{i-2}=k_{i-2}+l_{i-2}c_{i-1}$. Подставим в (13). Получаем

$$c_{i-1}=\frac{r_{i-1}-h_{i-1}k_{i-2}}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}}-\frac{h_i}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}}c_i.$$

Откуда $l_{i-1}=-\dfrac{h_i}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}}$, $k_{i-1}=\dfrac{r_i-h_{i-1}k_{i-2}}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}}$, $i=\overline{2,\,n}$.

Учитывая, что $c_0=0$, получим, что $k_0=0,\ l_0=0$.

В результате получим:

1. Вычисляем $s_i=2(h_{i-1}+h_i)$, (14)

2. $r_i=3\left[\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_i}-\dfrac{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{h_{i-1}}\right]$, (15)

при $i=\overline{2,\,n}$.

3. Полагаем $k_0=0,\ l_0=0$. В процессе прямого хода прогонки вычисляем прогоночные коэффициенты:

$$l_{i-1}=-\frac{h_i}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}},\quad i=\overline{2,\,n} \quad (17)$$

$$k_{i-1}=\frac{r_i-h_{i-1}k_{i-2}}{s_i+h_{i-1}l_{i-2}},\quad i=\overline{2,\,n}. \quad (18)$$

4. На обратном ходе имеем $c_{i-1}=k_{i-1}+l_{i-1}c_i$ из (16), $i=n,..,2$ и учитываем, что $c_n=0$.

5. Затем по формуле (11) вычисляем коэффициенты:

$$\begin{cases} d_i=\dfrac{c_i-c_{i-1}}{3h_i}, \\ b_i=\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_i}+\dfrac{2c_i+c_{i-1}}{3}h_i, \end{cases} \quad i=1,..n \quad (19)$$

Имеются некоторые данные, представленные в таблице 1. Нужно построить кубический интерполирующий сплайн для функции $y = f(x)$.

Таблица 1

i	***x***	***y***
0	-5	1
1	-3	-2
2	-1	-3
3	1	-1
4	3	0

Найдем значения a_i, h_i, s_i и r_i.

Таблица 2

i	a_i	h_i	s_i	r_i
0	0	2	0	0
1	-2	2	8	0
2	-3	2	8	3
3	-1	2	8	4,5
4	0	2	8	-1,5

Вычислим прогоночные коэффициенты l_i и k_i методом прямой прогонки.

Таблица 3

l_i	k_i
0	0
-0,25	0,375
-0,26667	0,5
-0,26786	-0,33482
-	-

На обратном ходе найдем коэффициенты c_i, используя формулу (16), полагая в ней $i = 4,.., 2$ и учитывая $c_4 = 0$.

Таблица 4

i	c_i
0	0
1	0,227679
2	0,589286
3	-0,33482
4	0

Найдем коэффициенты b_i и d_i, используя формулы (11) и учитывая $c_0 = 0$:

Таблица 5

i	d_i	b_i
0	0	0
1	0,037946429	-1,19643
2	0,060267857	0,4375
3	-0,15401786	0,946429
4	0,055803571	0,276786

Получаем кубический интерполирующий сплайн, график которого представлен на рисунке 1:

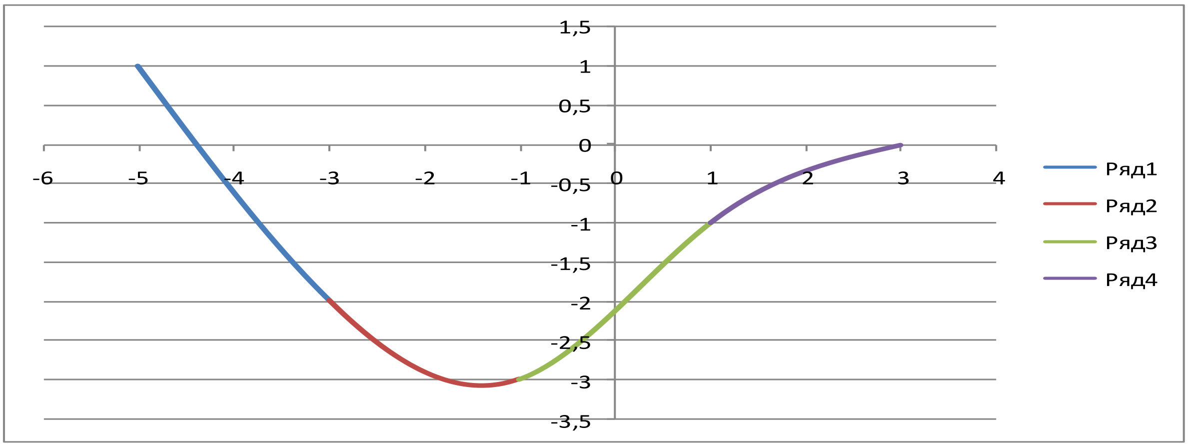

Рисунок 1. График кубического интерполирующего сплайна

Итак, метод кубического сплайна пошагово и точно переходит к нужному результату. На каждом шаге решения можно провести проверку правильности ответа. Данный метод очень прост в использовании, что помогает экономить время, не решая лишних уравнений.

Список литературы

1. Метод интерполяции данных. Е. И. Зилинская [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.rusnauka.com/13_NMN_2011/Informatica/1_86467.doc.htm – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 20.01.2017).

2. Интерполяционные сплайны. Общие понятия. Постановка задачи. Кубические сплайны. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://xn--90abr5b.xn--p1ai/exams/%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%BC%D0%B0%D1%82/40.htm – Заглавие с экрана. – (Дата обращения: 21.01.2017).